Dr. Martin Bies
Max Mayer

Sommersemester 2024

Einführung: Topologie – Blatt 1

Abgabe: Freitag, 10. Mai bis 10:00

(1) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Bezeichne mit $\mathscr{T}_1$ die von der Standardtopologie auf X induzierte Teilraumtopologie auf Y und mit $\mathscr{T}_2$ die Topologie auf Y, die durch $d|_Y$ definiert wird. Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ übereinstimmen.

(2) Man zeige:

(a) Sei X ein metrischer Raum. Dann besitzt X genau dann eine dichte abzählbare Teilmenge, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie von X gibt.

(b) Es gibt keine Metrik auf $\mathbb{R}$, die genau die Sorgenfrey-Topologie erzeugt.

(3) Es sei $F : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Man zeige:

(a) Sind $U_1, \ldots, U_n$ offene Mengen in X mit $U_1 \cup \ldots \cup U_n = X$ und ist $f|_{U_i}$ stetig für alle i, so ist f stetig.

(b) Sind $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen in X mit $A_1 \cup \ldots \cup A_n = X$ und ist $f|_{A_i}$ stetig für alle i, so ist f stetig.

Gelten diese Aussagen auch für Überdeckungen von X durch unendlich viele Teilmengen?

(4) Seien X, Y topologische Räume und bezeichne mit $\mathscr{T}$ die gröbste Topologie auf $X \times Y$ mit der Eigenschaft: Für alle topologischen Räume Z ist eine Abbildung $f : Z \to X \times Y$ genau dann stetig, wenn $\pi_X \circ f$ und $\pi_Y \circ f$ stetig sind. Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}$ die Produkttopologie ist.

(Dabei bezeichne π_X und π_Y die Projektion auf die jeweilige Komponente.)