Einführung in die Topologie SS 2024 — Dr. Martin Bies
RPTU Kaiserslautern–Landau — Max Mayer

Übungsblatt 1

Abgabefrist: **24. Mai 2024 um 10:00 Uhr**

Aufgabe 1
Sei X ein topologischer Raum. Wir sagen eine Folge $(a_n)_n$ in X ist konvergent gegen $a \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n \in U$ für alle $n > N$. Zeigen Sie:

(a) In der Komplement-abzählbar-Topologie[1] konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ genau dann gegen a, wenn $a_n = a$ für fast alle n gilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion $f : X \to Y$ und einen Punkt $a \in X$ an, sodass für jede gegen a konvergente Folge $(a_n)_n$ gilt, dass $(f(a_n))_n$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass jedes Dreieck D in $\mathbb{R}^2$ homöomorph zum Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ ist.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann zusammenhängend ist, wenn zu jeder stetigen Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ und je zwei Punkten $x, y \in X$ jeder Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ angenommen wird.

Aufgabe 4
Man zeige: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn der Graph

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

wegzusammenhängend ist.

[1] Siehe Skript Beispiel 1.5 (c). Die abgeschlossenen Mengen sind gerade die abzählbaren Teilmengen von X sowie X selbst.