Dr. Martin Bies
Max Mayer

Übungsblatt 3

Abgabefrist: **07. Juni 2024 um 10:00 Uhr**

Aufgabe 1
Sei X ein Hausdorff-Raum, der nicht kompakt ist. Wir setzen $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$[1], wobei „$\infty$“ nur als Symbol für einen zusätzlichen Punkt zu verstehen ist. Außerdem definieren wir

$$\mathcal{T} := \{U \mid U \subseteq X \text{ offen}\} \cup \{\widehat{X} \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\}.$$

Zeigen Sie:

1. $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\widehat{X}$.
2. $(\widehat{X}, \mathcal{T})$ ist kompakt.

Aufgabe 2
Bezeichne mit $\widehat{X}$ noch einmal die Einpunktkompaktifizierung des topologischen Raumes X.

1. Besitzt in X jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so ist $\widehat{X}$ auch ein Hausdorff-Raum
2. Zeige, dass $\widehat{\mathbb{R}}$ homöomorph zur Kreislinie S^1 ist.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ normal ist.

Aufgabe 4
Sei $\sim$ eine Relation auf einer Menge X.

1. Verifizieren Sie, dass die erzeugte Äquivalenzrelation $\approx$ in Konstruktion 5.1 tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.
2. Sei X das Intervall $[0, 1]$ und $x \sim y :\Longleftrightarrow x = 1,\ y = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$x \approx y \Longleftrightarrow x = y \text{ oder } (x, y) \in \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

[1] Man nennt $\widehat{X}$ die Einpunktkompaktifizierung von X.