Übungsblatt 5

Abgabefrist: **05. Juli 2024 um 10:00 Uhr**

Aufgabe 1 Es seien X ein topologischer Raum und $f : S^1 \to X$ stetig. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
2. f lässt sich stetig auf D^2 fortsetzen.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Kreislinie S^1 und das Möbiusband homotopieäquivalent sind.

Aufgabe 3 Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume. Beweisen Sie:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Aufgabe 4 Sei M ein Möbiusband und wähle einen Randpunkt $x \in \delta M$. Zeigen Sie:

1. Es gibt zwei homotope Schleifen $\gamma_1 \cong \gamma_2$ rel $\{0, 1\}$ in M mit $\gamma_i(a) = x$ für $a \in \{0, 1\}$, sodass $\gamma_1 \bullet \gamma_2$ homotop zu dem Weg genau einmal entlang des Randes δM ist.
2. Der Rand δM ist kein Deformationsretrakt von M.

Hinweis: Sie dürfen für Teil b die in der Vorlesung genannte (aber noch nicht bewiesene) Tatsache benutzen, dass $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ist und $\pi_1(S^1)$ durch den einfachen Weg entlang des Kreises erzeugt wird.

Bonusaufgabe
Nachdem wir uns auf dem dritten Übungsblatt politisch mit der Hufeisentheorie[1] auseinander gesetzt haben, wollen wir dieses Mal (topologisch) zeigen, dass es kein faires Wahlsystem gibt:
Ein Wahlsystem ist eine Abbildung φ, die aus n Stimmen $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ ein Wahlergebnis $P \in \mathcal{P}$ ermittelt. Dabei modellieren wir den Raum der politischen Orientierungen $\mathcal{P}$ als zweidimensionale Vektoren der Länge eins[2], das heißt $\mathcal{P} = S^1$. Es ist also $\varphi : (S^1)^n \to S^1$. Ein *faires* Wahlsystem φ sollte nun die folgenden Eigenschaften besitzen.

- φ sollte stetig sein. Kleinste Änderungen am Abstimmungsverhalten sollten nur kleinste Änderungen am Ergebnis bewirken.
- *Anonymität*: Das Ergebnis sollte unabhängig davon sein, wer welche Stimme abgegeben hat. Mathematisch: Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist $\varphi(P_1, \ldots, P_n) = \varphi(P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(n)})$.
- *Einstimmigkeit*: Wenn alle das gleiche wählen, sollte auch das das Wahlergebnis sein. Das heißt $\varphi(P, \ldots, P) = P$.

Für die Aufgabe nehmen wir nun der Einfachheit halber $n = 2$ an. Zeigen Sie mit Aufgabe 4: Es gibt kein faires Wahlsystem.

[1] der Einpunktkompaktifizierung des links-rechts Spektrums
[2] Falls Ihnen der *politische Kompass* etwas sagt, können Sie sich das so vorstellen.