Einführung in die Topologie SS 2024 | Dr. Martin Bies
RPTU Kaiserslautern–Landau | Max Mayer

# Übungsblatt 6

Abgabefrist: **19. Juli 2024 um 10:00 Uhr**

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen $X$ und $Y$ heißt *lokaler Homöomorphismus*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von $x$ gibt, die unter $f$ homöomorph auf eine Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(x)$ abgebildet wird.

**Aufgabe 1** Zeigen Sie, dass jede Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus ist, aber nicht jeder lokale Homöomorphismus eine Überlagerung ist.

**Aufgabe 2** Man zeige:

1. Jeder lokale Homöomorphismus bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.
2. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Überlagerungen und gelte für jeden Punkt $z \in Z$, dass $|g^{-1}\{z\}| < \infty$ ist, dann ist auch $g \circ f$ eine Überlagerung.

**Aufgabe 3** Sei $X$ ein Hausdorff-Raum. Zeigen Sie:

1. Operiere eine endliche Gruppe $G$ frei auf $X$, so ist diese Gruppenoperation auch frei diskontinuierlich.
2. Ist $G$ nicht endlich, so ist diese Aussage im Allgemeinen falsch.

**Aufgabe 4** Sei $(X, *)$ eine Gruppe ausgestattet mit einer Topologie, sodass

$$X \times X \to X,\ (a, b) \mapsto a * b \quad \text{und} \quad X \to X,\ a \mapsto a^{-1}$$

stetige Abbildungen sind. Bezeichne mit $e \in X$ das neutrale Element. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, e)$ abelsch ist.
*Hinweis: Zeigen Sie die Gleichung: $\alpha \bullet \beta = (\alpha \bullet \varepsilon) \cdot (\varepsilon \bullet \beta)$, wobei $\varepsilon$ den konstanten Weg $\varepsilon$ bei $e$ bezeichnet.*